Двадцать вторая олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина

Заочный тур

Приводим условия задач заочного тура Двадцать второй геометрической олимпиады им. И.Ф.Шарыгина.

Задачи олимпиады рассчитаны на учащихся последних четырёх классов средней школы. В списке, приведённом ниже, после порядкового номера каждой задачи указано, учащимся каких классов российской школы (на момент проведения олимпиады) она предназначена. В тех странах, где количество классов в школе другое, ученики последнего класса (на момент старта заочного тура) решают задачи 11 класса, ученики предпоследнего класса — задачи 10 класса и т.д. Можно решать задачи и для более старших классов (решённые задачи для более младших классов при подведении итогов не учитываются).

Полное решение любой задачи или любого её пункта, если задача имеет пункты, оценивается в 7 баллов. Неполное решение, в зависимости от степени продвижения, оценивается от 1 до 6 баллов. При отсутствии заметного продвижения ставится 0 баллов. Результатом участника является сумма баллов по всем задачам.

Решение каждой задачи начинайте с новой страницы: сначала надо переписать условие, затем записать решение, причем старайтесь писать подробно, приводя основные рассуждения и выкладки, делая отчётливые чертежи достаточного размера. **Если в задаче требуется дать ответ на некоторый вопрос (например, найти значение какой-нибудь величины), то этот ответ следует привести перед решением**. Пишите аккуратно, ведь Вы же заинтересованы в том, чтобы Вашу работу можно было понять и справедливо оценить!

Если Вы пользуетесь в решении каким-то фактом из школьного учебника, можно просто сослаться на него (чтобы было понятно, какую именно теорему Вы имеете в виду). Если же Вам необходим факт, не встречающийся в школьном курсе, его обязательно надо доказать (или сообщить, из какого источника он взят).

Можно (хотя и не обязательно) указать в работе, какие задачи Вам понравились. Нам будет интересно узнать Ваше мнение.

Решения задач на русском или английском языке должны быть представлены в электронной форме **не раньше 1 декабря 2025 и не позднее 1 марта 2026 года**. Для этого нужно зайти на сайт **https://geomolymp.ru/olympiads**, справа наверху указать язык (русский) и следовать появляющимся инструкциям.

ВНИМАНИЕ:

1. Решение каждой задачи (и каждого её пункта, если задача имеет пункты) должно содержаться в **отдельном** файле формата pdf, doc, docx или jpg. Если решение состоит из нескольких файлов, то нужно создать из них **архив** (zip или rar) и загрузить его.

2. Желательно выполнять работу на компьютере или сканировать, а не фотографировать. **Во всех случаях необходимо убедиться перед отправкой, что файл хорошо читается**.

3. Если несколько раз загружается решение одной и той же задачи, то в системе проверки остается только последнее. **Поэтому при необходимости что-то изменить Вам следует снова загрузить решение задачи полностью.**

4. После загрузки зайдите на сервер, откройте загруженный файл и проверьте, что он правильно загрузился.

При возникновении технических проблем с загрузкой работы обращайтесь по адресу **geomshar@yandex.ru. (НЕ присылайте работы на этот адрес!)**

Финальный тур состоится летом 2026 года под Москвой. На него будут приглашены победители заочного тура, не закончившие к этому времени школу. Критерии прохождения на финал определяются после проверки работ заочного тура в зависимости от количества участников с тем или иным результатом. Победители заочного тура — выпускники школ получат грамоты оргкомитета олимпиады. Списки победителей будут опубликованы на сайте **www.geometry.ru** к 1 июня 2026 г. Свои результаты Вы сможете узнать по адресу **geomshar@yandex.ru** после публикации списков.

1. (8) Пусть треугольники T и ABC симметричны относительно точки P. Точки A', B', C' симметричны A, B, C относительно соответственных сторон T. Оказалось, что две из этих точек совпали. Докажите, что все три точки совпали.

2. (8) В равнобокую трапецию $ABCD$ вписана окружность, касающаяся боковой стороны AB в точке T. Отрезки TC и TD повторно пересекают эту окружность в точках P, Q соответственно. Чему может быть равно $TP/PC + TQ/QD$?

3. (8) Пусть AK — биссектриса треугольника ABC, точка N на AC такова, что $\angle NKC = \angle CAB/2$, L — середина KN. Докажите, что $\angle KBN = \angle LAK$.

4. (8) В описанном четырёхугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке X. Докажите, что к вписанным окружностям треугольников ABC, BCD, AXD существует общая касательная.

5. (8) Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Серединный перпендикуляр к отрезку AI пересекает сторону BC в точке D; прямая AD повторно пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке X. Докажите, что $|BX - CX| = AX$.

6. (8–9) В треугольнике ABC O — центр описанной окружности, I — центр вписанной, H — ортоцентр, N — точка Нагеля. Докажите, что $IN = IH$ тогда и только тогда, когда угол ONH прямой.

7. (8–9) Сторона AB треугольника ABC касается вписанной и вневписанной окружностей в точках P и Q соответственно. Точка T — проекция середины AB на биссектрису угла C. Докажите, что точки C, P, Q, T лежат на одной окружности.

8. (8–9) В треугольнике ABC $\angle B = 30^\circ$, O — центр описанной окружности, I — центр вписанной, окружности AIB, CIB пересекают BC, AB соответственно в точках D, E. Докажите, что D — ортоцентр треугольника OEI.

9. (8–9) Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности с центром в I. Окружности BID и AIC пересеклись в точке P, а лучи AB и DC в точке Q. Пусть R — середина PI. Докажите, что $ARQD$ вписанный.

10. (8–9) Даны окружность ω, точка A на ней и точка B. Пусть X — произвольная точка ω, T — точка пересечения касательных к окружности ABX в точках X и B. Найдите геометрическое место точек T.

11. (8–10) Точки P и Q на стороне AC треугольника ABC таковы, что $PQ = AC/2$. Точка B' симметрична вершине B относительно стороны AC. Точки D и E на прямых BP и BQ выбраны так, что прямые AD и CE касаются окружностей APB' и CQB' соответственно. Докажите, что описанная окружность треугольника BDE касается стороны AC.

12. (8–10) Вершины прямоугольного треугольника ABC — точки с целыми координатами. Вписанная в треугольник окружность с центром I касается сторон AB, BC в точках C', A' соответственно. Прямые AA' и CC' пересекаются в точке G. Докажите, что прямая IG проходит через какую-то точку с целыми координатами.

13. (8–11) Пусть $A_1 \dots A_n$ — выпуклый многоугольник. Вершины двух замкнутых ломаных — $A_1, \dots, A_n$ в некотором порядке. Чему равно наибольшее возможное отношение их длин?

14. (9–11) Дан треугольник $ABC(AB < AC)$. На луче BA отмечена точка P так, что $BP = AC$, на луче CA точка Q так, что $CQ = AB$. На прямую PQ опустили перпендикуляры BB_1 и CC_1. Докажите, что одна из точек пересечения окружностей (CB_1Q) и (BC_1P) лежит на внешней биссектрисе угла BAC.

15. (9–11) Докажите, что точка Нагеля треугольника лежит на его вписанной окружности тогда и только тогда, когда биссектрисы двух углов высекают на стороне треугольника Жергонна, отсекающей третью вершину, отрезок вдвое меньший этой стороны.

16. (9–11) Прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей трапеции $ABCD$ и параллельная ее основаниям, пересекает боковую сторону AB в точке M. Пусть K — проекция M на CD. Докажите, что KM — биссектриса угла AKB.

17. (9–11) Дан остроугольный треугольник ABC с ортоцентром H и центром описанной окружности O. Касательные к описанной окружности треугольника ABC в точках B и C пересекаются в точке T. Точки X и Y лежат на сторонах AB и AC так, что $\angle AOX = \angle AOY = \angle BTC$. Докажите, что $HT \perp XY$.

18. (9–11) Дана точка P внутри треугольника $\triangle ABC$. Прямые BP, CP повторно пересекают окружность ABC в точках E, F соответственно. Окружность Ω проходит через точки P, E и пересекает прямую AC в точках B_1, B_2. Прямые PB_1, PB_2 пересекают прямую AB в точках C_1, C_2. Докажите,что точки C_1, C_2, P, F лежат на одной окружности.

19. (10–11) Окружность с центром I, вписанная в треугольник ABC, касается сторон BC, CA, AB в точках A', B', C' соответственно. Точки A_b, A_c, B_a, C_a — середины отрезков $A'B$, $A'C$, $B'A$, $C'A$ соответственно. Прямые A_bB_a и A_cC_a пересекаются в точке P. Докажите, что точка, симметричная I относительно P, лежит на AA'.

20. (10–11) Высоты AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC повторно пересекают описанную около него окружность в точках A_2, B_2, C_2. Пусть A_3 — точка пересечения окружностей ABC и AB_1C_1, отличная от A, точки B_3, C_3 определяются аналогично, A_4, B_4, C_4 — основания высот в треугольнике $A_1B_1C_1$. Докажите, что прямые AA_4, BB_4, CC_4, A_2A_3, B_2B_3, C_2C_3 пересекаются в одной точке.

21. (10–11) В треугольнике ABC $\angle A = 2\pi/3$. Пусть P — произвольная точка, лежащая внутри треугольника на биссектрисе угла A, прямые BP , CP пересекают AC, AB в точках E, F соответственно, D — произвольная точка на стороне BC, прямые DE, DF пересекают PC, PB в точках M, N соответственно. Найдите угол MAN.

22. (10–11) Вписанная окружность треугольника ABC касается стороны BC в точке D. Пусть F — точка Фейербаха, H — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую DF. Докажите, что $FH : DF = 1 : 2$.

23. (10–11) Даны треугольник ABC и точка P на плоскости. Прямые AP, BP, CP пересекают во второй раз окружность ABC в точках A', B', C' соответственно. Найдите геометрическое место точек Q таких, что точки пересечения QA' с BC, QB' с AC и QC' с AB лежат на одной прямой.

24. (11) Сфера, вписанная в тетраэдр $ABCD$, касается грани ABC в ее ортоцентре H, а граней ABD, ACD в точках P, Q соответственно. Прямые DP, DQ пересекают плоскость ABC в точках X, Y. Докажите, что $\angle XHY = 2\angle XAY$.