Двадцать вторая олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Заочный тур. Решения

1. (8) (С.Кузнецов) Пусть треугольники T и ABC симметричны относительно точки P. Точки A', B', C' симметричны A, B, C относительно соответственных сторон T. Оказалось, что две из этих точек совпали. Докажите, что все три точки совпали.

Решение. Так как соответствующие стороны треугольников T и ABC параллельны, точки A', B', C' лежат на высотах треугольника ABC. Если, например, A' и B' совпадают, то соответствующая точка является ортоцентром H треугольника ABC и, значит, две стороны треугольника T являются серединными перпендикулярами к отрезкам AH, BH. Пусть A_0, B_0, A_1, B_1 — середины отрезков BC, AC, AH, BH соответственно. Тогда $A_0B_0A_1B_1$ — прямоугольник, поскольку его стороны — средние линии треугольников ABC, ABH, ACH, BCH (рис. 1). При симметрии относительно центра этого прямоугольника прямые AC и BC переходят в серединные перпендикуляры к BH и AH, поэтому AB переходит в третью сторону треугольника T. Но образом AB при этой центральной симметрии является серединный перпендикуляр к CH, следовательно, C' тоже совпадает с H.

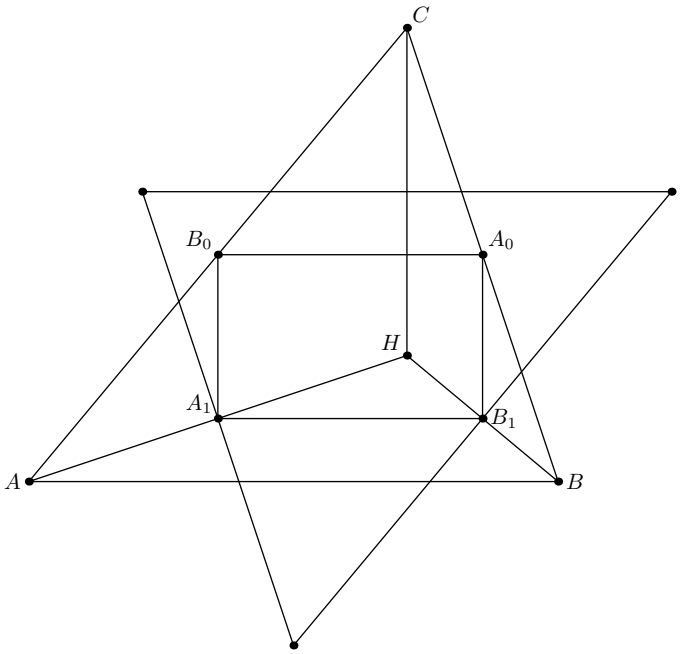

Рис. 1.

Примечание. Треугольники ABC и T имеют общую окружность девяти точек и симметричны относительно ее центра.

2. (8) (S.Khalifah) В равнобокую трапецию $ABCD$ вписана окружность, касающаяся боковой стороны AB в точке T. Отрезки TC и TD повторно пересекают эту окружность в точках P, Q соответственно. Чему может быть равно $TP/PC + TQ/QD$?

Ответ. 8.

Решение. Пусть M, N — середины оснований BC, AD соответственно (рис. 2). Тогда $BT^2 = CM^2 = CP \cdot CT = CP(CP + TP)$, следовательно,

$$\frac{TP}{CP} = \frac{CM^2}{CP^2} + 1 = \frac{CT^2}{BT^2} + 1.$$

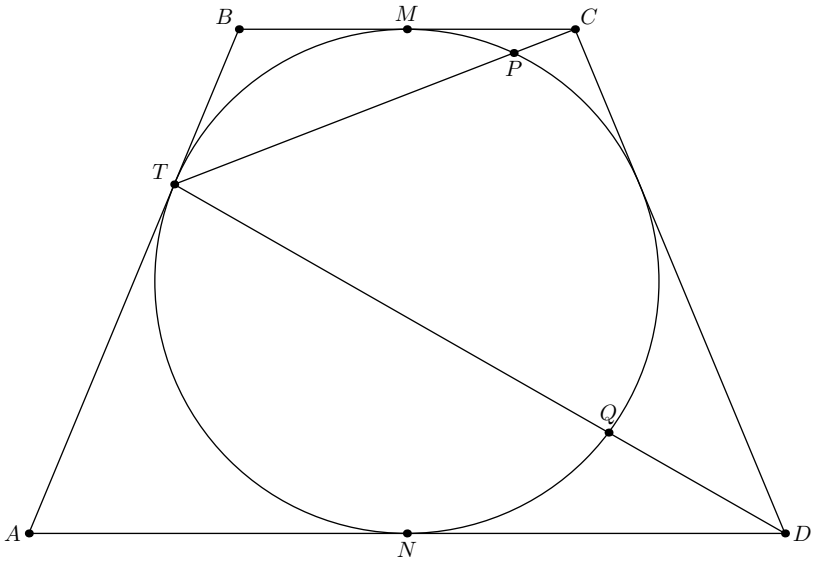

Рис. 2.

Применяя теорему косинусов к треугольнику CBT, в котором $BC = 2BT$, получаем $CT^2 = BT^2(5 - 4\cos\angle B)$. Аналогично $DT^2 = AT^2(5 - 4\cos\angle A)$. Поскольку $\cos\angle A + \cos\angle B = 0$, получаем, что $CT^2/BT^2 + DT^2/AT^2 = 10$ и $TP/PC + TQ/QD = 8$.

3. (8) (И.Кухарчук) Пусть AK — биссектриса треугольника ABC, точка N на AC такова, что $\angle NKC = \angle CAB/2$, L — середина KN. Докажите, что $\angle KBN = \angle LAK$.

Решение. Так как $\angle NKC = \angle CAK = \angle KAB$, то $\angle AKB = \angle ANK$ (рис. 3). Следовательно, треугольники ANK и AKB подобны и $AK : AN = BK : KN$. Применяя теорему синусов к треугольникам ANL, ALK и NKB, получаем, что $\sin\angle NAL : \sin\angle LAK = \sin\angle BNK : \sin\angle KBN$, а поскольку $\angle BNK + \angle KBN = \angle NAK$, отсюда следует искомое равенство.

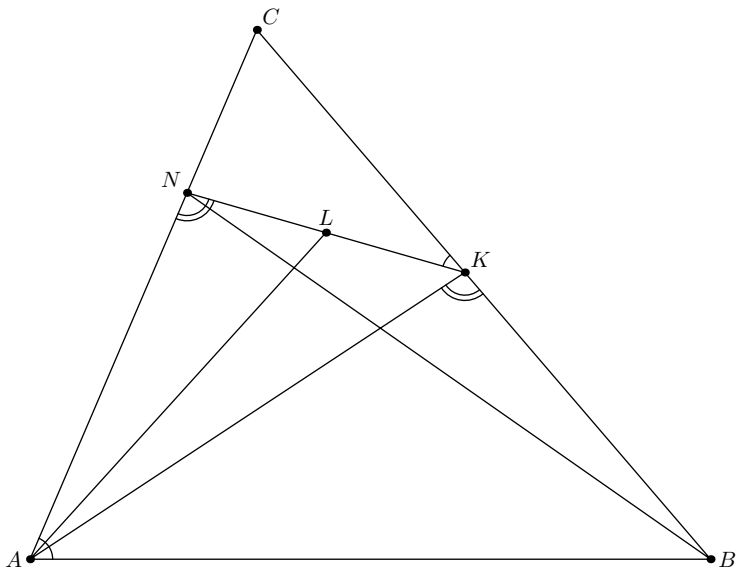

Рис. 3.

4. (8) (Г.Кузнецов) В описанном четырёхугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке X. Докажите, что к вписанным окружностям треугольников ABC, BCD, AXD существует общая касательная.

Решение. Пусть l_1 — длина общей внешней касательной к окружностям, вписанным в треугольники ABC, BCD; l_2 — длина общей внутренней касательной к окружностям, вписанным в треугольники ABC, AXD; l_3 — длина общей внутренней касательной к окружностям, вписанным в треугольники BCD, AXD. Имеем

$$l_1 = \frac{BC + AC - AB}{2} - \frac{BC + CD - BD}{2} = \frac{(AC + BD) - (AB + CD)}{2},$$

$$l_2 = \frac{AC + AB - BC}{2} - \frac{AX + AD - DX}{2}, \quad l_3 = \frac{BD + CD - BC}{2} - \frac{AD + DX - AX}{2},$$

$$l_2 + l_3 = \frac{(AC + BD) + (AB + CD) - 2(AD + BC)}{2}.$$

Поскольку $AB + CD = AD + BC$, получаем, что $l_1 = l_2 + l_3$, следовательно, общая внешняя касательная к вписанным окружностям треугольников ABC и BCD, отличная от BC, касается и третьей окружности (рис. 4).

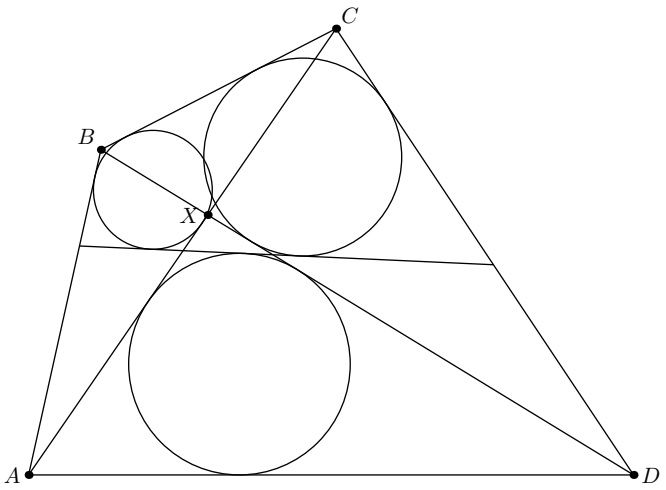

Рис. 4.

5. (8) (Я.Щербатов) Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Серединный перпендикуляр к отрезку AI пересекает сторону BC в точке D; прямая AD повторно пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке X. Докажите, что $|BX - CX| = AX$.

Решение. Пусть B_0, C_0 — середины дуг AC, AB соответственно; P — второе пересечение окружности DBB_0 и прямой AD (рис. 5). Тогда $\angle BPX = \angle BB_0C_0 = (180^\circ - \angle BXP)/2$, $\angle B_0PX = \angle B_0BC = \angle B_0XP$, следовательно, $XP = XB$, $B_0X = B_0P$, и треугольники AB_0P, CB_0X равны. Тогда $XC = AP$, $AX = XP - AP = XB - XC$.

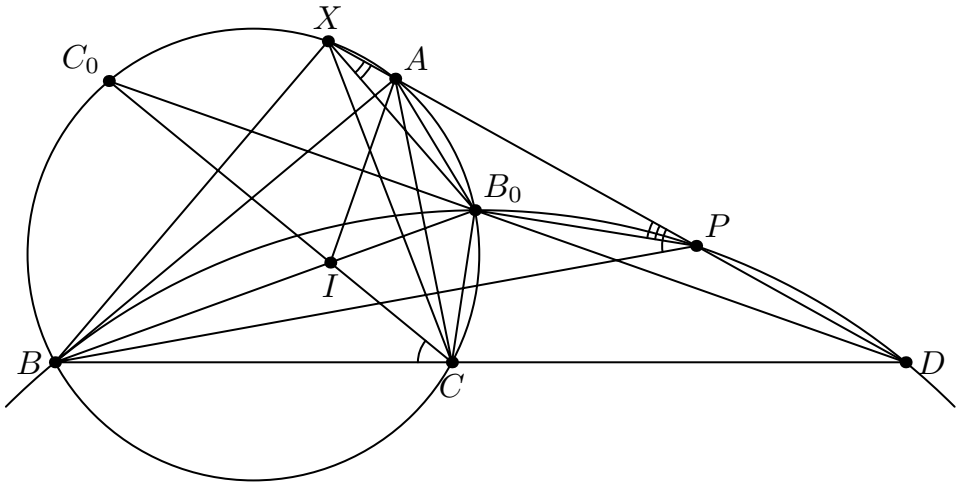

Рис. 5.

6. (8–9) (Л.Емельянов) В треугольнике ABC O — центр описанной окружности, I — центр вписанной, H — ортоцентр, N — точка Нагеля. Докажите, что $IN = IH$ тогда и только тогда, когда угол ONH прямой.

Решение. Пусть M — центр тяжести треугольника, E — середина отрезка OH (центр окружности девяти точек). Тогда отрезки IN и OH пересекаются в точке M, причем $OM : MH = IM : MN = EM : MO = 1 : 2$ (рис. 6). Из последних двух равенств следует, что $IE \parallel ON$, а значит, прямая IE делит отрезок NH пополам. Поэтому $IN = IH$ тогда и только тогда, когда $IE \perp NH$, т.е. угол ONH прямой.

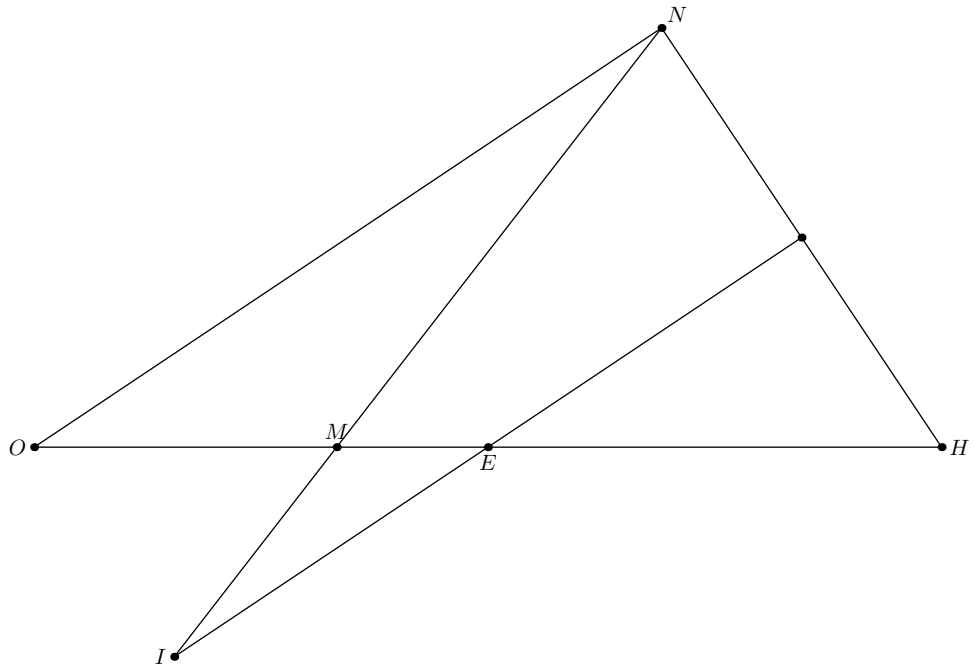

Рис. 6.

7. (8–9) (А.Заславский) Сторона AB треугольника ABC касается вписанной и вневписанной окружностей в точках P и Q соответственно. Точка T — проекция середины AB на биссектрису угла C. Докажите, что точки C, P, Q, T лежат на одной окружности.

Первое решение. Пусть M — середина AB, I — центр вписанной окружности треугольника, K — точка этой окружности, противоположная P, L — основание биссектрисы из C (рис. 7). Тогда точка K лежит на прямой CQ и $\angle KIC = \angle PMT = |\angle A - \angle B|/2$. Кроме того, $MP = |a-b|/2$, $ML = |a-b|c/(2(a+b))$, где a, b, c — длины сторон треугольника. Поэтому

$$MT : MP = c\cos\frac{A-B}{2} : (a{+}b) = \sin C\cos\frac{A-B}{2} : (\sin A{+}\sin B) = \sin C : 2\sin\frac{A+B}{2} = \sin\frac{C}{2}.$$

Так как $\sin\frac{C}{2} = IK : IC$, треугольники MTP и IKC подобны. Следовательно, $\angle QPT = \angle QCT$ и четырехугольник $CPTQ$ вписанный.

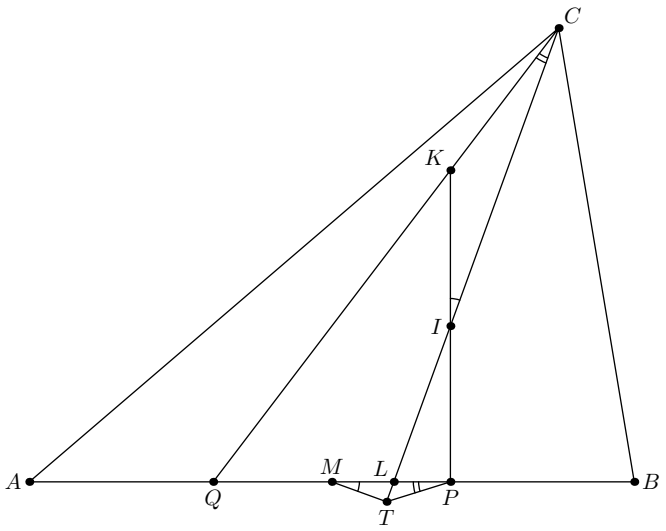

Рис. 7.

Второе решение. Так как $\angle IPM = \angle ITM = 90°$, точки I, P, T, M лежат на одной окружности, т.е. $\angle PTC = \angle LMI$. Кроме того, $MP = MQ = |a-b|/2$, $ML = c|a-b|/2(a+b)$, следовательно, $MQ : LM = (a+b) : c = CI : IL$. Поэтому $MI \parallel CQ$, $\angle CQP = \angle CTP$ и точки C, P, Q, T лежат на одной окружности.

8. (8–9) (Д.Крохалев, Г.Кузнецов, А.Коваленко) В треугольнике ABC $\angle B = 30°$, O — центр описанной окружности, I — центр вписанной, окружности AIB, CIB пересекают BC, AB соответственно в точках D, E. Докажите, что D — ортоцентр треугольника OEI.

Решение. Так как $\angle B = 30°$, получаем, что $\angle AIC = 105°$, $\angle AID = \angle CIE = 150°$. Тогда $\angle AIE = \angle CID = 105°$, т.е. точки D, E симметричны A, C относительно CI, AI соответственно. Поэтому $AE = CD = AC = AO = CO$ и $\angle ODI = \angle ODC - \angle IDC = 90° - \angle DOC/2 - \angle A/2 = 120° - \angle C/2 - \angle A/2 = 45°$ (рис. 8). Но $\angle EID = 45°$, следовательно, $OD \perp IE$. Аналогично $OE \perp ID$.

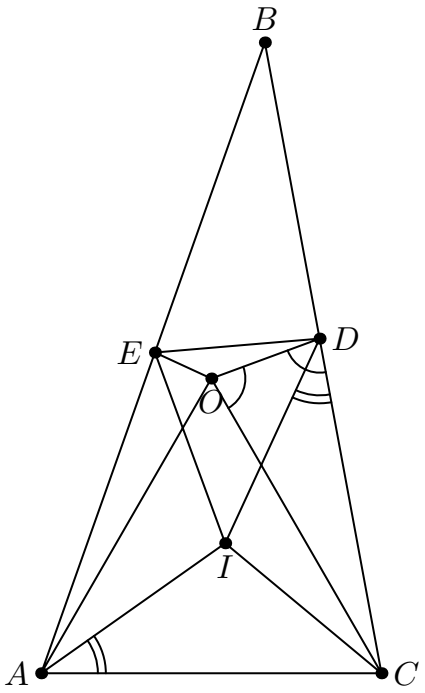

Рис. 8.

9. (8–9) (И.Кухарчук) Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности с центром в I. Окружности BID и AIC пересеклись в точке P, а лучи AB и DC в точке Q. Пусть R — середина PI. Докажите, что $ARQD$ вписанный.

Решение. Пусть K, L, M, N — точки касания вписанной окружности со сторонами AB, BC, CD, DA соответственно. При инверсии относительно окружности точки A, B, C, D, Q переходят в середины A', B', C', D', Q' отрезков KN, KL, LM, MN, KM соответственно, точка P в центр тяжести G четырехугольника $KLMN$, а точка R в точку R', симметричную I относительно G (рис. 9). Эту точку можно получить, как образ точки L при композиции трех гомотетий: с центром N и коэффициентом $1/2$, с центром Q' и коэффициентом $1/2$, с центром I и коэффициентом 2. Эта композиция переводит точку I в центр окружности девяти точек треугольника MNK, следовательно, точка R' лежит на окружности $A'D'Q'$.

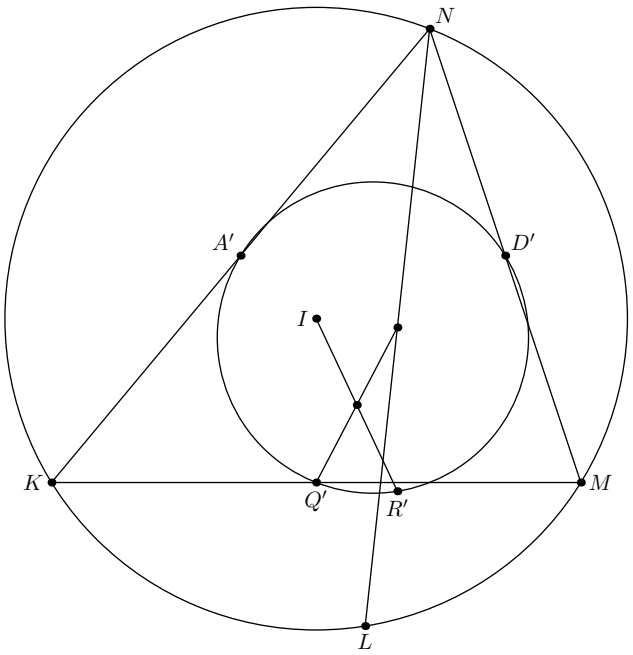

Рис. 9.

10. (8–9) (Е.Волокитин) Даны окружность ω, точка A на ней и точка B. Пусть X — произвольная точка ω, T — точка пересечения касательных к окружности ABX в точках X и B. Найдите геометрическое место точек T.

Ответ. Прямая, проходящая через середину отрезка BC и перпендикулярная BD, где C — вторая точка пересечения ω с прямой AB, а D — точка ω, диаметрально противоположная C.

Решение. Пусть P — точка пересечения касательных, Q — точка, симметричная B относительно P. Так как $PQ = PB = PX$, треугольник BXQ прямоугольный, причем $\angle BQX = 90^\circ - \angle XBP = 90^\circ - \angle XAC = \angle DCX$ (рис. 10). Поэтому XQB и XCD подобны, а значит, треугольники XQC и XBP также подобны. Следовательно, $XQ \perp BD$, откуда и следует ответ (очевидно, что любая точка полученной прямой может быть получена, как точка пересечения касательных)

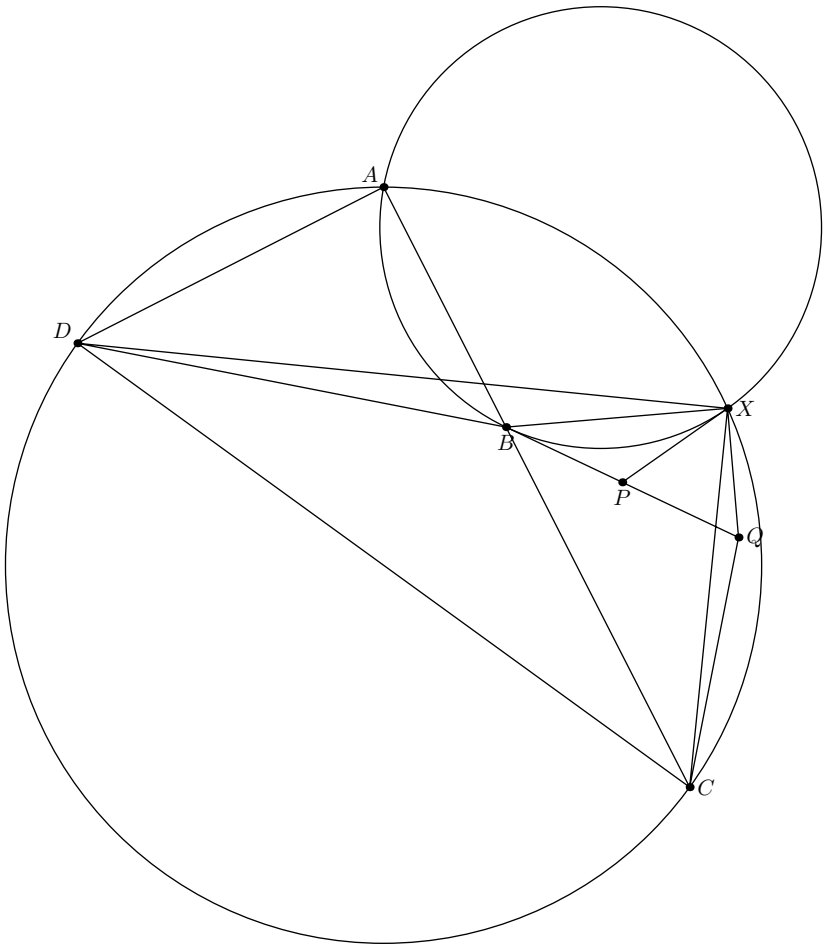

Рис. 10.

11. (8–10) (А.Марданов) Точки P и Q на стороне AC треугольника ABC таковы, что $PQ = AC/2$. Точка B' симметрична вершине B относительно стороны AC. Точки D и E на прямых BP и BQ выбраны так, что прямые AD и CE касаются окружностей APB' и CQB' соответственно. Докажите, что описанная окружность треугольника BDE касается стороны AC.

Решение. Пусть M — такая точка, что P — середина AM. Тогда Q — середина CM. Построим окружность, проходящую через B и касающуюся AC в точке M. Пусть прямые BP, BQ повторно пересекают эту окружность в точках D', E' соответственно (рис. 11). Так как $AP^2 = AM^2 = PD' \cdot PB$, треугольники APD' и BPA подобны. Следовательно, $\angle D'AP = \angle PBA = \angle AB'P$, т.е. прямая AD' касается окружности APB' и D' совпадает с D. Аналогично E' совпадает с E.

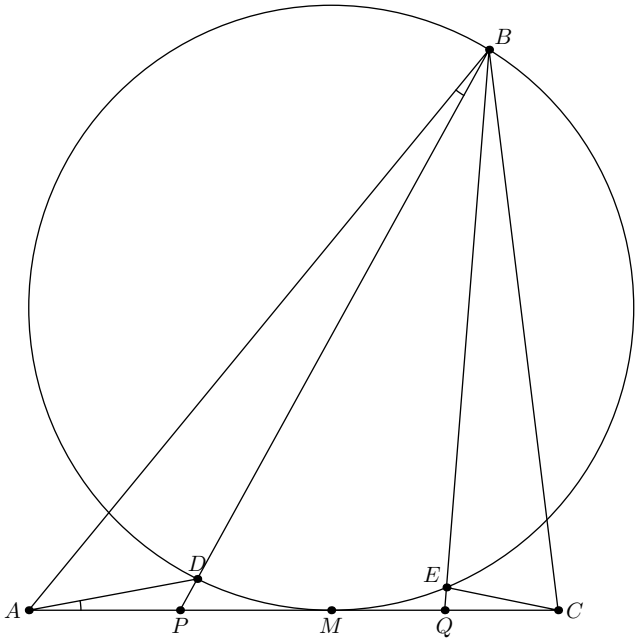

Рис. 11.

12. (8–10) (А.Терешин) Вершины прямоугольного треугольника ABC — точки с целыми координатами. Вписанная в треугольник окружность с центром I касается сторон AB, BC в точках C', A' соответственно. Прямые AA' и CC' пересекаются в точке G. Докажите, что прямая IG проходит через какую-то точку с целыми координатами.

Первое решение. Очевидно, что точка D, симметричная вершине прямого угла C относительно середины гипотенузы AB, имеет целые координаты. Докажем, что IG проходит через D. Пусть A_1, B_1, C_1 — точки касания вписанной окружности со сторонами BC, CA, AB соответственно, A_2 — точка пересечения прямых BC и B_1C_1, B_2 — точка пересечения прямых AC и A_1C_1. Тогда $IA_2 \perp AA_1$, $IB_2 \perp BB_1$, $IG \perp A_2B_2$. При этом, поскольку CA_1IB_1 — квадрат, то $B_1B_2 = BC$, $A_1A_2 = AC$, следовательно, $A_2C = AB_1$, $B_2C = BA_1$ (рис. 12). А, поскольку проекции DI на AC и BC равны соответственно AB_1 и BA_1, получаем, что $ID \perp A_2B_2$, т.е. G, I, D лежат на одной прямой.

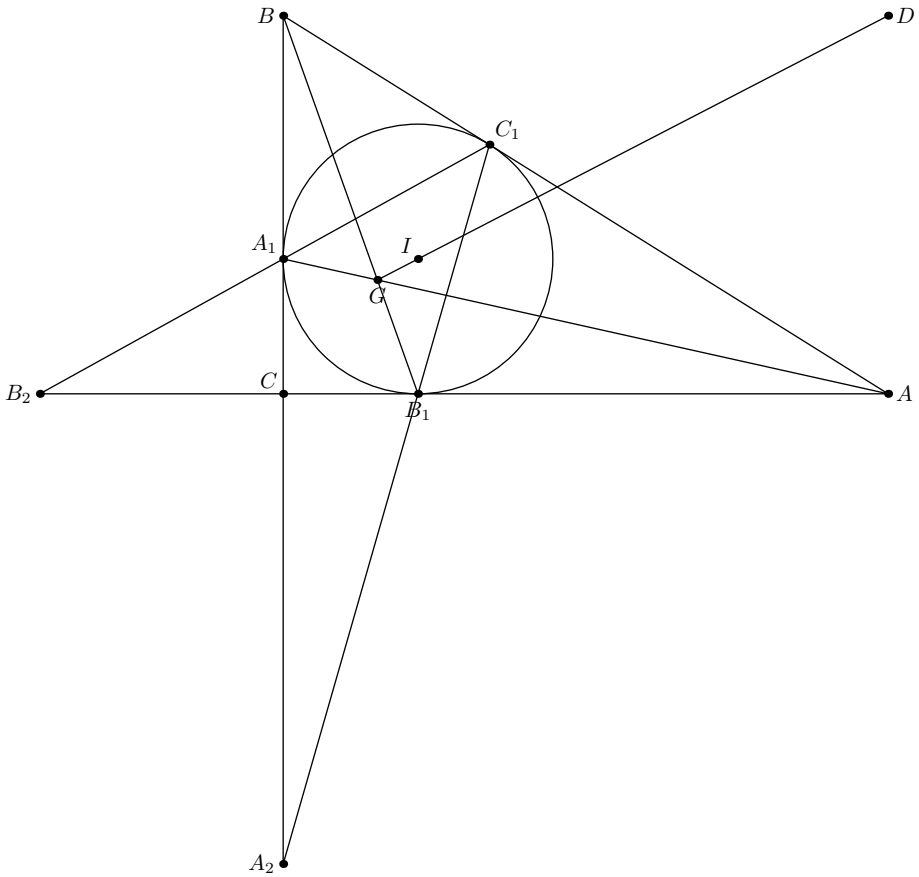

Рис. 12.

Второе решение. Пусть U, V — бесконечно удаленные точки прямых AC, BC соответственно. Применяя теорему Паппа к тройкам точек (B_1, A, U) и (A_1, B, V), получаем, что G, I, D лежат на одной прямой.

13. (8–11) (Д.Крохалев) Пусть $A_1 \dots A_n$ — выпуклый многоугольник. Вершины двух замкнутых ломаных — $A_1, \dots, A_n$ в некотором порядке. Чему равно наибольшее возможное отношение их длин?

Ответ. $[n/2]$.

Пример. Пусть все вершины многоугольника разбиты на два множества: $A_1, \dots, A_{[n/2]}$ и $A_{[n/2]+1}, \dots, A_n$ так, что вершины в каждом множестве близки друг к другу, а расстояние между двумя вершинами из разных множеств близко к 1. Тогда вершины можно соединить как ломаной, длина которой сколь угодно мало отличается от 2, так и ломаной, длина которой сколь угодно мало отличается от n при четном n и от $n-1$ при нечетном.

Оценка. При четном n длина любой ломаной больше, чем $2d$, и меньше, чем nd, где d — наибольшее из расстояний между вершинами многоугольника.

Рассмотрим случай нечетного $n = 2k+1$. Заметим, что, если два звена XY и ZT ломаной пересекаются, то можно заменить их на XZ и YT, уменьшив длину ломаной. Поэтому наименьшую длину имеет ломаная $A_1 \dots A_n$, а наибольшую — ломаная, в которой вершина A_i соединена с A_{i+k} и A_{i-k} (сложение и вычитание по модулю n),

поскольку у нее любые два несмежных звена пересекаются. Сложив n неравенств вида $A_iA_{i+k} + A_iA_{i-k} < P - A_{i+l}A_{i-k}$, получим искомую оценку.

14. (9–11) (В.Конышев) Дан треугольник $ABC(AB < AC)$. На луче BA отмечена точка P так, что $BP = AC$, на луче CA точка Q так, что $CQ = AB$. На прямую PQ опустили перпендикуляры BB_1 и CC_1. Докажите, что одна из точек пересечения окружностей CB_1Q и BC_1P лежит на внешней биссектрисе угла BAC.

Решение. Из условия следует, что $AP = AQ$, значит, прямая PQ перпендикулярна внешней биссектрисе угла A, а прямые BB_1, CC_1 параллельны ей. Пусть U, V — проекции B, C соответственно на внешнюю биссектрису угла A. Из равенства $AB = CQ$ следует, что $AU = CC_1$, т.е. ACC_1U — параллелограмм, $C_1U = AC = BP$ и $PUBC_1$ — равнобокая трапеция, т.е. U лежит на окружности BPC_1. Аналогично V лежит на окружности CQB_1 (рис. 14). Степени точки A относительно этих окружностей равны $AP \cdot AB$ и $AQ \cdot AC$, т.е. их отношение равно $AB : AC = AU : AV$. Поэтому вторые точки пересечения окружностей с биссектрисой совпадают.

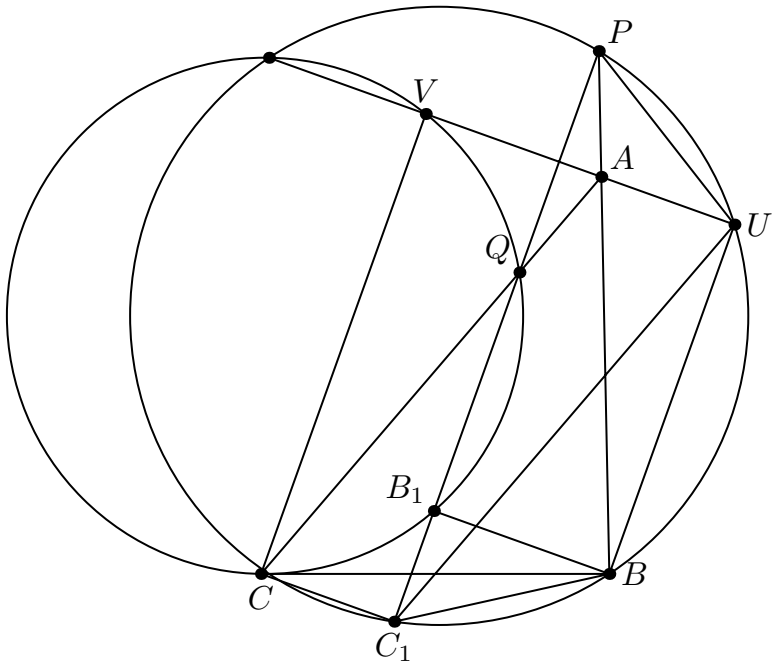

Рис. 14.

15. (9–11) (Л.Емельянов, П.Кожевников) Докажите, что точка Нагеля треугольника лежит на его вписанной окружности тогда и только тогда, когда биссектрисы двух углов высекают на стороне треугольника Жергонна, отсекающей третью вершину, отрезок вдвое меньший этой стороны.

Решение. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC, а стороны BC, CA, AB касаются ее в точках A', B', C' соответственно. Предположим, что точка Нагеля N лежит на дуге $A'B'$. Тогда, так как нагелиана из C пересекает эту дугу в точке, противоположной C', то $S_{ABN} = 2S_{ABI}$. Поскольку $S_{ABN} : S_{ABC} = (p - c) : p$, $S_{ABI} : S_{ABC} = c : p$, где a, b, c — длины сторон треугольника, а p — его полупериметр, получаем, что $c = p - c$, т.е. длина стороны AB равна четверти периметра треугольника.

Пусть биссектрисы AI, BI пересекают отрезок $A'B'$ в точках P, Q соответственно. Известно, что эти точки лежат на средних линиях, параллельных соответственно BC и AC (рис. 15). Поэтому $PB' : A'B' = BC/2 : A'C = a/2 : (p-c)$, $QA' : A'B' = b/2 : (p-c)$ и $PQ : A'B' = c/2 : (p-c)$. Таким образом, равенство $PQ = A'B'/2$ тоже равносильно тому, что длина AB равна четверти периметра.

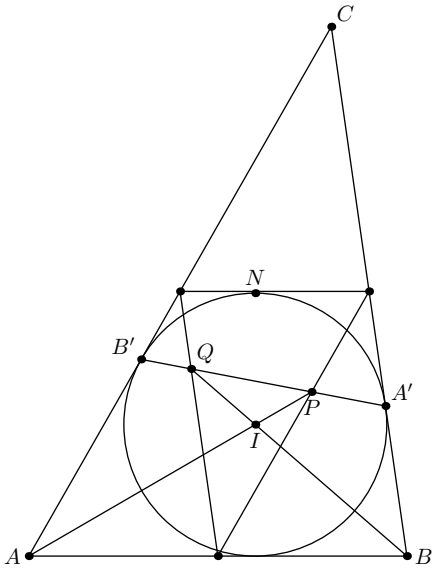

Рис. 15.

Примечание. Треугольники, в которых одна из сторон равна четверти периметра, обладают рядом других интересных свойств. Например, вписанная окружность касается соответствующей средней линии.

16. (9–11) (М.Панов) Прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей трапеции $ABCD$ и параллельная ее основаниям, пересекает боковую сторону AB в точке M. Пусть K — проекция M на CD. Докажите, что KM — биссектриса угла AKB.

Решение. Утверждение задачи равносильно тому, что $(KA, KB, KM, KC) = -1$. Пусть диагонали трапеции пересекаются в точке L, а продолжения боковых сторон в точке S (рис. 16). Тогда $SA : SB = AD : BC = AL : LC = AM : MB$, следовательно, четверка A, B, M, S гармоническая.

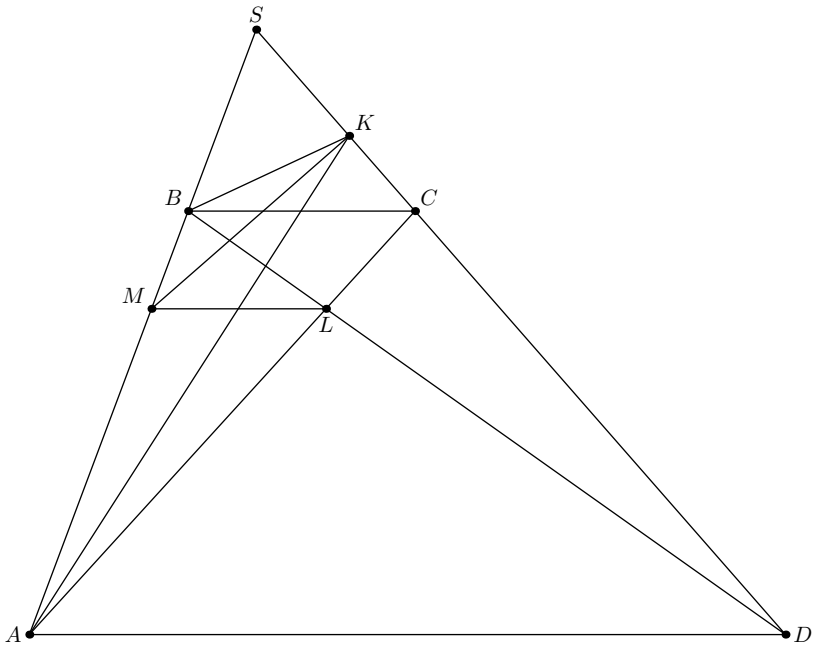

Рис. 16.

17. (9–11) (К.Бельский) Дан остроугольный треугольник ABC с ортоцентром H и центром описанной окружности O. Касательные к описанной окружности треугольника ABC в точках B и C пересекаются в точке T. Точки X и Y лежат на сторонах AB и AC так, что $\angle AOX = \angle AOY = \angle BTC$. Докажите, что $HT \perp XY$.

Решение. Пусть лучи OX, OY пересекают описанную окружность в точках U, V соответственно. Тогда $\angle OAU = \angle TCB = \angle CAB$, следовательно, $\angle BAU = \angle CAO = \angle HAB$, т.е. точка U симметрична H относительно AB. Аналогично V симметрична H относительно AC (рис. 17).

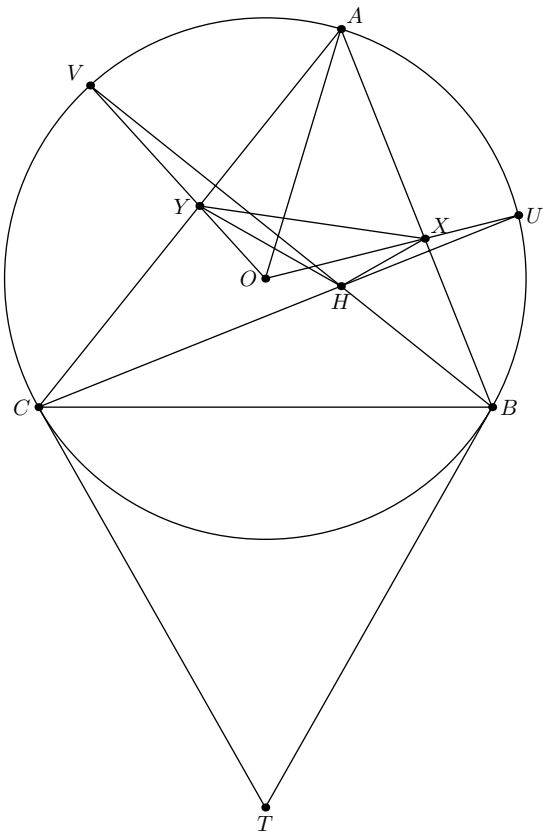

Рис. 17.

Закончить решение можно разными способами.

Первый способ. Точка V симметрична точке, которая диаметрально противоположна точке B в описанной окружности треугольника ABC, относительно серединного перпендикуляра к AC. Следовательно, $BT \perp BO \parallel HY$. Аналогично получаем, что $CT \perp HX$. Значит, треугольники AXY и TBC ортологичны и оба центра ортологии совпадают с точкой H, откуда и следует искомая перпендикулярность.

Второй способ. Из симметрии имеем $HX = XU = R - OX$, где R — радиус описанной окружности. Кроме того, $\angle TOY = \angle TOC + \angle COV = \angle A + 2\angle CBH = \pi - 2\angle C + \angle A$. Поэтому $TY^2 + HX^2 = TO^2 + OY^2 + 2TO \cdot OY \cos(2C - A) + (R - OX)^2$ или

$$TY^2 + HX^2 = TO^2 + R^2 + OX^2 + OY^2 + 2TO(OY \cos(2C - A) - OX \cos A).$$

Аналогично получаем

$$TX^2 + HY^2 = TO^2 + R^2 + OX^2 + OY^2 + 2TO(OX \cos(2B - A) - OY \cos A).$$

Применяя к треугольникам OAX, OAY теорему синусов, получаем, что $OX : R = \sin\angle OAX : \sin\angle OXA = \cos C : \cos(B - A)$ и $OY : R = \cos B : \cos(C - A)$. Следовательно,

$$OX : OY = \cos C \cos(C - A) : \cos B \cos(B - A) = (\cos A + \cos(2C - A)) : (\cos A + \cos(2B - A)),$$

значит $TX^2 + HY^2 = TY^2 + HX^2$, что равносильно утверждению задачи.

18. (9–11) (К.Бельский) Дана точка P внутри треугольника $\triangle ABC$. Прямые BP, CP повторно пересекают окружность ABC в точках E, F соответственно. Окружность Ω проходит через точки P, E и пересекает прямую AC в точках B_1, B_2. Прямые PB_1, PB_2 пересекают прямую AB в точках C_1, C_2. Докажите,что точки C_1, C_2, P, F лежат на одной окружности.

Решение. При движении точки B_1 по AC точки B_2, C_1, C_2 движутся проективно. Поэтому достаточно доказать утверждение задачи для трех положений.

Пусть одна из точек B_1, B_2 совпадает с точкой пересечения прямых BP и AC. Тогда вторая точка будет бесконечно удаленной, одна из точек C_1, C_2 совпадет с точкой B, а другая с такой точкой Q, что $PQ \parallel AC$. При этом $\angle QPF = \angle ACF = \angle ABF$, следовательно, P, B, F, Q лежат на одной окружности (рис.18).

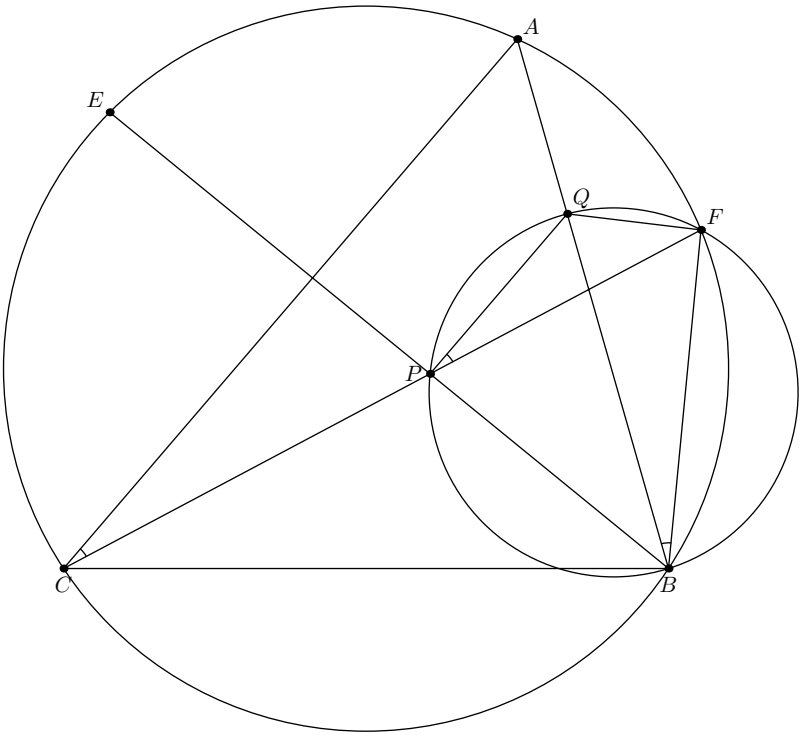

Рис. 18.

Аналогично рассматриваются случаи, когда одна из точек B_1, B_2 совпадает с C.

19. (10–11) (Я.Щербатов) Окружность с центром I, вписанная в треугольник ABC, касается сторон BC, CA, AB в точках A', B', C' соответственно. Точки A_b, A_c, B_a, C_a — середины отрезков $A'B$, $A'C$, $B'A$, $C'A$ соответственно. Прямые A_bB_a и A_cC_a пересекаются в точке P. Докажите, что точка, симметричная I относительно P, лежит на AA'.

Решение. Пусть гомотетия с центром I и коэффициентом 2 переводит точки A_b, A_c, B_a, C_a в X', Y', X, Y соответственно. Утверждение задачи равносильно перспективности треугольников AXY и $A'X'Y'$

Заметим, что $\angle BCY' = \angle CBX' = \angle CAX = \angle BAY = \pi/2$ и $AX = AY = BX' = CY' = IA_1$. Возьмем на высоте треугольника из A точку Q такую, что $AQ = IA_1$ (рис.

19). Так как $ABX'Q$, $ACY'Q$, $A'B'XQ$ и $A'C'TQ$ — параллелограммы, получаем, что $X'Q \perp AY$, $Y'Q \perp AX$, $A'Q \perp XY$, $XQ \perp A'Y'$, $YQ \perp A'X'$, $AQ \perp X'Y'$, т.е. треугольники AXY и $A'X'Y'$ ортологичны и оба центра ортологичности совпадают с Q. Следовательно, треугольники перспективны.

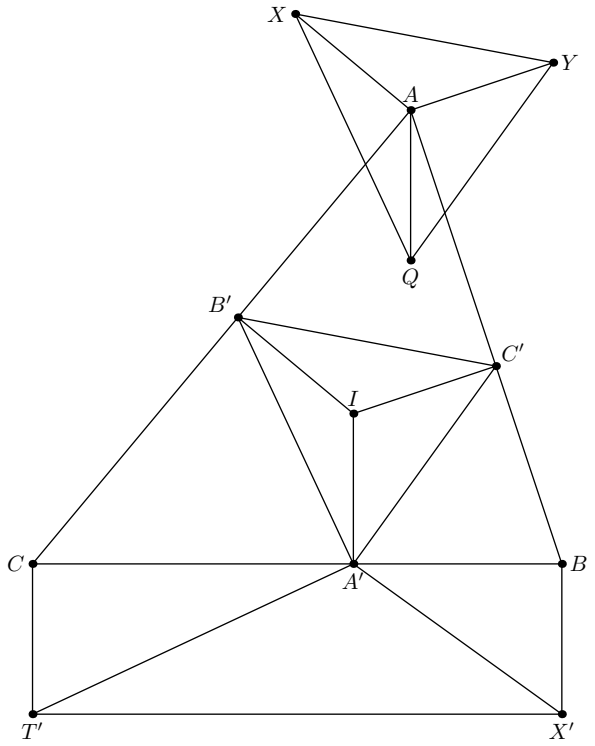

Рис. 19.

20. (10–11) (Ю.Нагуманов) Высоты AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC повторно пересекают описанную около него окружность в точках A_2, B_2, C_2. Пусть A_3 — точка пересечения окружностей ABC и AB_1C_1, отличная от A, точки B_3, C_3 определяются аналогично, A_4, B_4, C_4 — основания высот в треугольнике $A_1B_1C_1$. Докажите, что прямые AA_4, BB_4, CC_4, A_2A_3, B_2B_3, C_2C_3 пересекаются в одной точке.

Решение. Заметим, что H — инцентр $A_1B_1C_1$, а значит инцентр и $A_2B_2C_2$. Поскольку B_3 лежит на окружности с диаметром BH, B_3H проходит через середину большей дуги A_2C_2. Значит B_3 — точка касания полувписанной окружности. Тогда A_2A_3, B_2B_3, C_2C_3 пересекаются в центре положительной гомотетии переводящей вписанную окружность треугольника $A_2B_2C_2$ в описанную. Заметим, что прямая через центр гомотетии и середину дуги проходит через точку касания вписанной окружности. Сделаем гомотетию с центром в H и коэффициентом 2. Она переводит B в центр I_B вневписанной окружности $A_2B_2C_2$, точку касания в точку, симметричную H относительно стороны A_2C_2, а B_4 в основание высоты B'.

Поскольку B_2, основание биссектрисы угла $A_2B_2C_2$, H и I_B образуют гармоническую четверку, а $\angle B_2B'A_2 = \pi/2$, получаем, что $B'A_2$ — биссектриса угла $HB'I_B$ (рис. 20). Поэтому прямая BB_4 проходит через точку касания стороны A_2C_2 с вписанной окружностью, что и требуется.

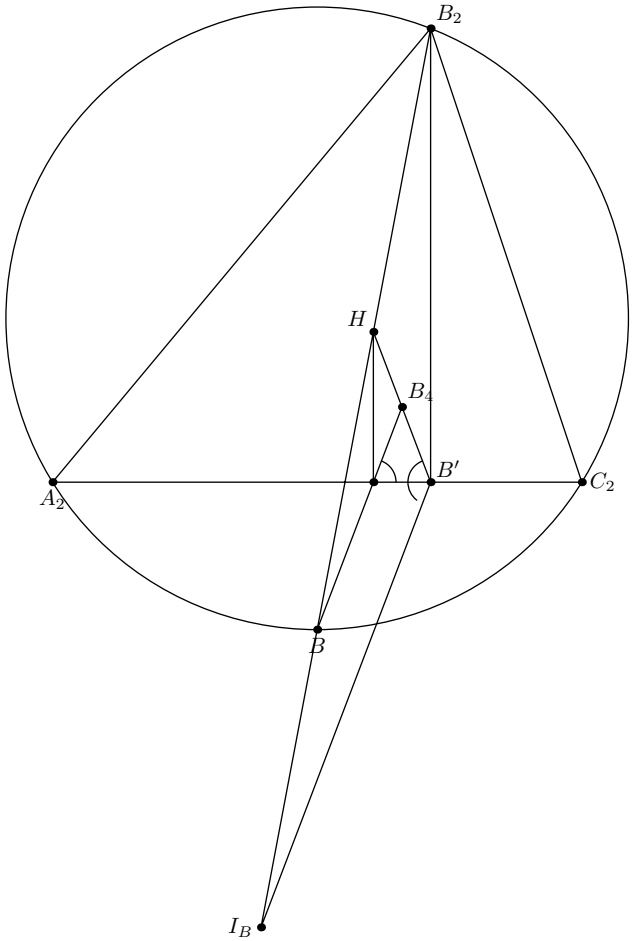

Рис. 20.

21. (10–11) (Tran Quang Hung) В треугольнике ABC $\angle A = 2\pi/3$. Пусть P — произвольная точка, лежащая внутри треугольника на биссектрисе угла A, прямые BP , CP пересекают AC, AB в точках E, F соответственно, D — произвольная точка на стороне BC, прямые DE, DF пересекают PC, PB в точках M, N соответственно. Найдите угол MAN.

Ответ. 60°.

Решение. Обозначим через $\mathcal{R}$ поворот вокруг A, переводящий прямую AC в AP. Проецируя из D прямую CP на BP, получаем равенство двойных отношений $(P, C, F, M) = (P, B, N, E)$. С другой стороны, $(AP, AC, AF, AM) = (\mathcal{R}(AP), \mathcal{R}(AC), \mathcal{R}(AF), \mathcal{R}(AM)) = (AB, AP, AE, \mathcal{R}(AM)) = (B, P, N', E)$, где N' — пересечение прямых BE и $\mathcal{R}(AM)$. Следовательно, $N' = N$ и $\angle MAN = 60^\circ$ (рис. 21).

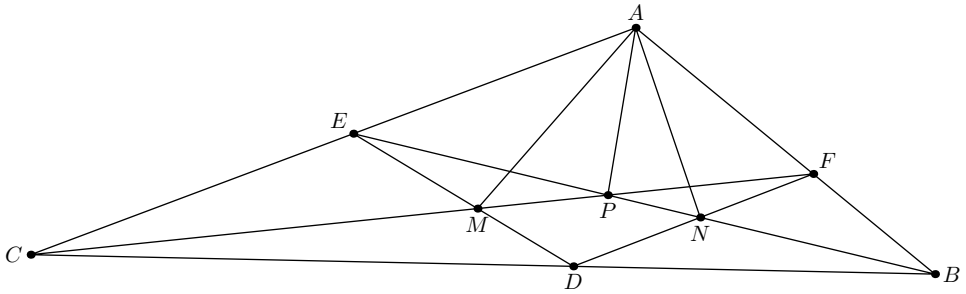

Рис. 21.

22. (10–11) (С.Чуев) Вписанная окружность треугольника ABC касается стороны BC в точке D. Пусть F — точка Фейербаха, H — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую DF. Докажите, что $FH : DF = 1 : 2$.

Решение. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC, точка N диаметрально противоположна D, M — середина AI. Поскольку проекциями N и I на DF являются F и середина DF соответственно, утверждение задачи равносильно тому, что M, N, F лежат на одной прямой, т.е. $\angle MFD = \pi/2$. Пусть K, L, P — середины AB, BI, IC соответственно (рис. 22). Известно, что F лежит на окружностях Эйлера треугольников ABI и BCI, следовательно, $\angle MFD = \angle MFL + \angle LFD = \pi - \angle LKM + \angle LPD = \pi - \angle AIB + \angle ICB = \pi - (\pi + \angle ACB)/2 + \angle ICB = \pi/2$.

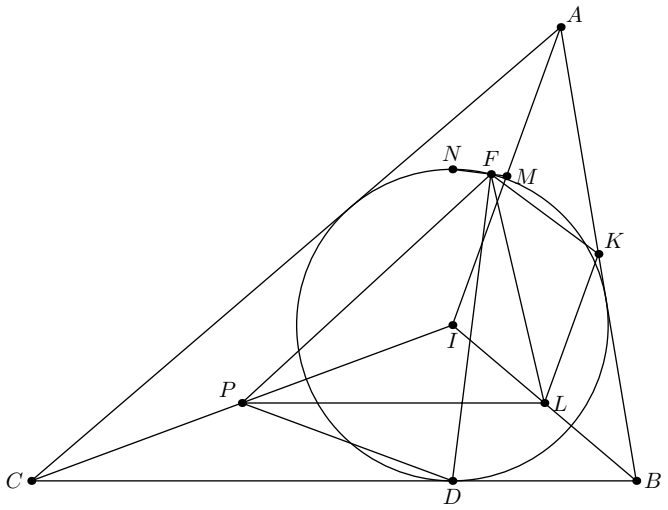

Рис. 22.

23. (10–11) (В.Шеломовский) Даны треугольник ABC и точка P на плоскости. Прямые AP, BP, CP пересекают во второй раз окружность ABC в точках A', B', C' соответственно. Найдите геометрическое место точек Q таких, что точки пересечения QA' с BC, QB' с AC и QC' с AB лежат на одной прямой.

Ответ. Окружность ABC и поляра точки P относительно нее.

Решение. Пусть прямые $A'Q$ и BC пересекаются в точке X, прямые $B'Q$ и AC — в точке Y, а прямые $C'Q$ и AB — в точке Z. Легко видеть, что отношения $BX : XC$, $CY : YA$, $AZ : ZB$ являются дробно-линейными функциями координат (x, y) точки Q. Поэтому условие коллинеарности X, Y, Z задает уравнение третьей степени относительно (x, y). Следовательно, достаточно доказать, что любая точка описанной окружности или поляры P принадлежит искомому ГМТ.

Пусть Q лежит на окружности ABC. Применяя теорему Паскаля к шестиугольнику $ACBB'QA'$, получаем, что прямая XY проходит через P (рис. 23). Аналогично получаем, что Z лежит на этой же прямой.

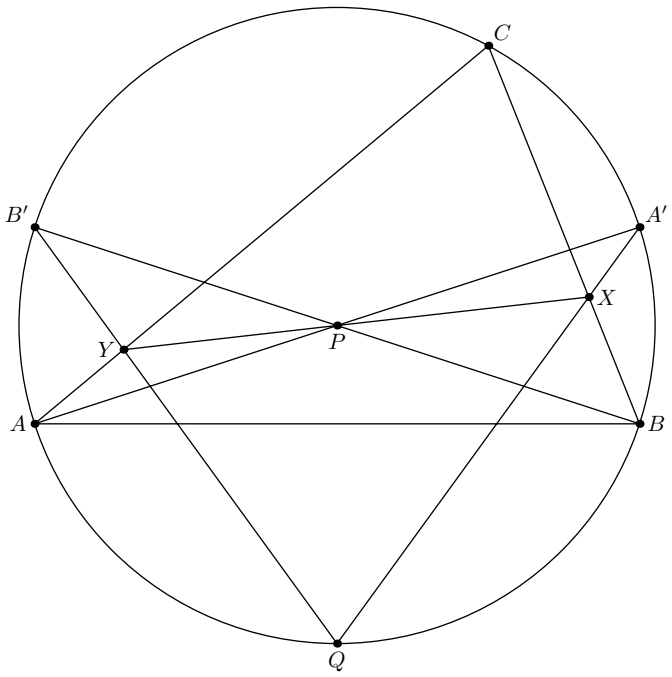

Рис. 23.

Пусть теперь прямые AC и $A'C'$ пересекаются в точке U, прямые BC, $B'C'$ — в точке V, а Q лежит на поляре UV точки P. Так как треугольники ABC и $A'B'C'$ перспективны, у них есть общая вписанная коника κ. Применяя к шестиугольнику $A'UYXB'V$ теорему Брианшона, получаем, что прямая XY касается κ. Тогда Z тоже лежит на этой прямой.

24. (11) (А.Терешин) Сфера, вписанная в тетраэдр $ABCD$, касается грани ABC в ее ортоцентре H, а граней ABD, ACD в точках P, Q соответственно. Прямые DP, DQ пересекают плоскость ABC в точках X, Y. Докажите, что $\angle XHY = 2\angle XAY$.

Решение. Конус с вершиной D, описанный вокруг сферы, пересекает плоскость ABC по эллипсу с фокусом H, касающемуся сторон AB, AC в точках X, Y. Второй фокус этого эллипса — центр O описанной около треугольника ABC окружности. Поскольку точки U, V, симметричные H относительно AB и AC, лежат на описанной окружности, а X, Y на отрезках OU, OV соответственно, $\angle XHY = \angle UHV - \angle UHX - \angle VHY = \pi - \angle CAB - \angle HCO - \angle HBO = 2\angle YAX$ (рис. 24).

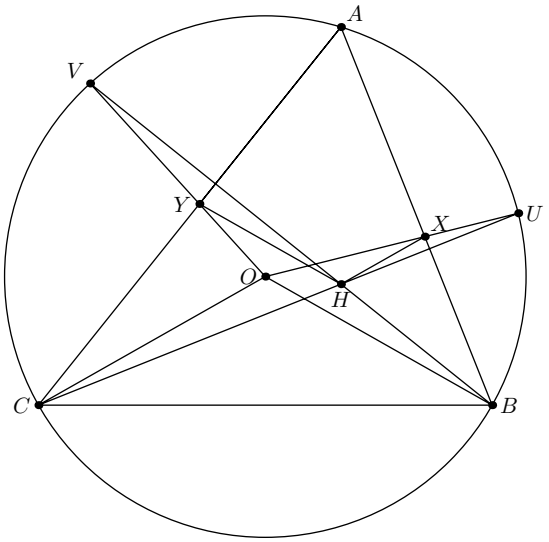

Рис. 24.